当代物理前沿专题之七

混沌现象

郝柏林

“混沌”是确定论系统所表现的随机行为的总称．它的根源在于非线性的相互作用．

所谓“确定论系统”，指描述该系统的数学模型是不包含任何随机因素的完全确定的方程．例

如，一支简单摆的微小振动，由下面的线性微分方程描述：

$$\frac{d^2\varphi}{dt}+\omega^2\varphi=0 \qquad (7.1)$$

其中φ是摆偏离竖直状态的小小的**角位移**，ω是摆的**圆频率**，即频率v乘以2π．它和振动周期T的关系是

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{\nu} \qquad (7.2)$$

这些都是我们在大学物理中学过的知识，后面还会再推导一次．象式（7.1）这样的方程，它的解是完全确定的，可以写成

φ（t）＝Asin（ωt）+Bcos（ωt） （7.3）．

两个常数A和B可以由**初始条件**，即t=0时的角位移φ（0）和**角速**

度φ（0）完全确定．这里φ（t）即微分$\frac{d\Phi(t)}{dt}$．因此，对于简单摆这样

的系统，只要给定了初始条件，它今后的运动就完全确定了，任何时刻t的角位移和角速度都可以精确地预言．如果初始条件发生小小的变化，摆的行为也变化不大，同样可以精确预言．换句话说，摆的运动状态对于初始条件的细微变化并不敏感．

随机运动的经典实例，是植物学家布朗（R. Brown）1827年在显微镜下看到的液体中花粉颗粒的无规运动，现在称为**布朗运动**．我们可以试图用牛顿定律来描述布朗运动．设想一粒花粉飘落到液体中，它带着一定的初始速度，受到液体粘滞性导致的阻力，还受到成亿的液体

分子的随机冲撞,它还可能受到某种外力f（x）的作用．阻力通常比例于速度$v=\dot{x}$，但方向相反，可以写成$-k\dot{x}$，k是摩擦系数．根据牛顿定律有

$$m\ddot{x}=f(x)-k\dot{x}+\text{随机力} \qquad (7.4)$$

这里的随机力只能用随时间无规则变化的随机数ξ（t）来代表．事实上在阴力作用下，花粉的速度的变化，即加速度$\ddot{x}$变得越来越小，甚至可以从方程（7.4）中忽略．于是我们得到

$$k\frac{dx}{dt}=f(x)+\sigma\xi(t) \qquad (7.5)$$

σ是一个参数，用来反映随机力的强弱．关于随机力ξ（t）我们所知甚少，只能假定它满足一定的概率分布，例如高斯分布；还可以合理地假定它的平均值为零，等等．这样，式（7.5）就成为一个典型的**随机微分方程**，即著名的朗之万（P． Langevin）方程．

目前大学课程中对随机微分方程讲得很少，但它们是很有实用价值的一大类方程．朗之万方程的理论也已经发展得相当完备．例如，只要方程（7.5）中的两个系数k和σ满足一定的比例关系，方程的解最终与初始条件没有关系，x会成为满足一定分布的随机数．从方程的解对初值变化根本无关的意义上说，这类随机微分方程描述的运动也是简单的．

自然界中最常见的运动形态，往往既不是完全确定的，也不是完全随机的，而是介乎二者之间．对于这类运动，很长时期没有恰当的描述体系．混沌现象的理论，为更好地理解自然界提供了一个框架．对混沌现象的认识，是近20年来非线性科学最重要的成就之一．我们就从非线性讲起．

7．1 什么是非线性

“线性”和“非线性”首先用于区别函数y=f（x）对自变量x的依赖关系．线性函数

$$y=ax+b \qquad (7.6)$$

画出来是一条直线（图7-1）．其它一切高于x一次方的多项式函数和其它函数，都是非线性的．最简单的非线性函数是抛物线

$$y=ax^2+bx+c \qquad (7.7)$$

如图7-2所示．在这些函数关系中，a、b和c是参量．各个参量并不同样重要．例如，两个式子中的a都是重要的，它决定曲线是向上还是向下，而b和c可以通过改变坐标原点等办法改动或取成零．定性地说，线性关系只有一种，而非线性关系千变万化，无法穷举．然而，非线性关系还可能具有某些不同于线性关系的共性．

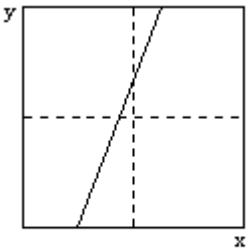


图 7-1　线性函数示意

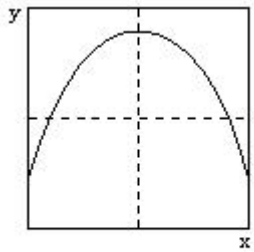


图 7-2　抛物线函数（a<0）

概括地说，可以列举非线性的以下特点：

第一，线性是简单的比例关系，而非线性是对这种关系的偏离．线性关系是“水涨船高”，但一般只适用于自变量的一定范围，不能无限制地“涨”上去，而非线性才能反映“过犹不及”，“一波三折”等更复杂的行为．

第二，线性关系是互不相干的独立贡献，而非线性则是相互作用．如果x代表某种昆虫的数目，每个昆虫产α个卵，其总数

$$y=\alpha x \tag{7.8}$$

由线性关系决定．然而，x个昆虫由于争夺食物而咬斗，咬斗事件的数目可能有

$$y=\frac{x(x-1)}{2} \tag{7.9}$$

种组合．这就是非线性关系了．相互作用使得整体不再简单地等于部分之和，而可能出现不同于“线性叠加”的增益或亏损．

第三，对于理解混沌现象有重要意义的一条差别：线性关系保持讯号的频率成分不变，而非线性使频率结构发生变化．

我们首先解释一下**线性运动模式**这个概念．出现在单摆方程（7.1）的解（7.3）中的sin（ωt）和cos（ωt）是两种基本的运动模式，它们线性地叠加起来，组成摆的运动φ（t）．同样的，sin（2ωt）或cos（6ωt），是另外一些基本模式，而$\cos^2$（ωt）不是基本的模式，因为根据三角函数关系

$$\cos^2(\omega t)=\frac{1+\cos(2\omega t)}{2} \qquad (7.10)$$

它可以分解成1（这是ω=0的模式）和cos（2ωt）两种模式的线性组合.

对于一个遵从欧姆定律的线性电路，电压V，电流I和电阻R的关系是

$$V=RI \qquad (7.11)$$

如果I是频率固定的交流信号$I=I_0\cos(\omega t)$，电压V也只含有同样的频率ω. 然而，如果电压电流关系中出现了非线性项，例如

$$V=RI+R_1I^2 \qquad (7.12)$$

则对于同样的交流输入，电压V中就会有直流（ω=0）和倍频2ω出现.

一般说来，许多物理系统都可以看成“黑盒子”. 人们输入具有一定频率成分的讯号，测量输出讯号的频率构成. 如果输入讯号和输出讯号的频率相同，只是强弱有所变化，那黑盒子里面只有一个线性系统. 如果输入讯号含有两种频率ω_1和ω_2，而输出频率有0，$2\omega_1$，$2\omega_2$，$\omega_1\pm\omega_2$，甚至$n\omega_1\pm m\omega_2$（这里n和m是整数），则黑盒子里面是一个非线性系统①.

只要存在任意小的非线性（例如在式（7.12）中$R_1<<R$），就会出现和频、差频、倍频等成分. 换言之，这些新频率成分不是非线性强到一定程度（如R_1达到某个临界值）才突然出现的**阈值现象**. 这样，我们就涉及到非线性的另一条特点.

第四，非线性是引起行为突变的原因. 对线性的细小偏离，往往并不引起行为突变，而且可以从原来的线性情形出发，靠修正线性理论去描述和理解. 然而，非线性大到一定程度时，系统行为可能发生突变. 还用前面的黑盒子讨论，这时输出讯号中可能突然出现某些**分频**，如ω/2，ω/4甚至ω/3. 非线性系统往往在一系列参量阈值上发生突变，每次突变都伴随着某种新的分频成分，最终进入混沌状态. 这些阈值和分频，不能象前面借用三角函数的关系来简单解释，而必须动用混沌动力学中的方法和概念. 最简捷的方式，是考察一个简单的力学系统，看怎样改造到出现混沌现象.

7．2　强迫摆的混沌运动

考察一个简单的**数学摆**：一根本身没有质量的长度为l的细杆，一端固定在可以无摩擦地自由转动的轴承O上，另一端是质量为m的质点. 整个运动发生在图7-3所示平面中.

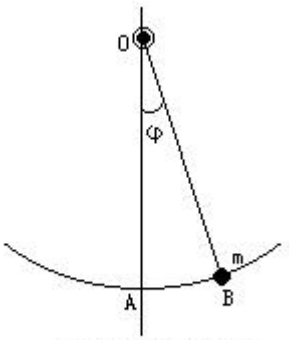


图 7-3 数学摆示意

当质点竖直地悬在A点时，摆处于势能最低的状态．它可以永远静止在这点上．当质点被偏置到B点时，它的势能是

$$V=mlg\,[1-\cos(\varphi)] \qquad (7.13)$$

我们取静止点A的势能为0，因为势能总是相对于某个状态来测量的．式（7．13）中的g是重力加速度，φ是前面已经提到过的角位移．质点m只能沿着半径为l的大圆运动，它的位移是x=lφ（按弧度算），因此

加速度是$l\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$.

写出牛顿方程

$$ml\frac{d^2\varphi}{dt^2}=力=-\frac{\partial V}{\partial x} \qquad (7.14)$$

即

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega^2\sin(\varphi)=0 \qquad (7.15)$$

这里圆频率ω由摆长l决定，即

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}} \qquad (7.16)$$

由于正弦函数可以展开成无穷级数

$$\sin(\varphi)=\varphi-\frac{\varphi^3}{6}+\frac{\varphi^5}{120}-\cdots \qquad (7.17)$$

所以式（7.15）是一个非线性的微分方程．当角位移很小时，sin（φ）可以近似地换成φ，得到前面的方程（7.1）．

角位移Φ和角速度 $\dot{\Phi}$ 是两个动力学变量．它们张成一个**相平面**．

相平面中的每一点代表系统的一种可能的运动状态．由于沿大圆转动的周期性，可以把φ限制在-π到+π之间，只考虑相平面中的一个垂直条带．图7-4是运动能量不大时摆的周期振动的相平面表示．

我们可以考虑摩擦阻力．加入在方程（7.4）中见过的 $-k\dot{\Phi}$ 项，使它

成为**阻尼摆**

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+k\frac{d\varphi}{dt}+\omega^2\sin(\varphi)=0 \qquad (7.18)$$

阻尼摆在相平面中的运动轨道不再是周期的，而是盘旋缩小，最终静止在原点的一条螺旋线（图7-

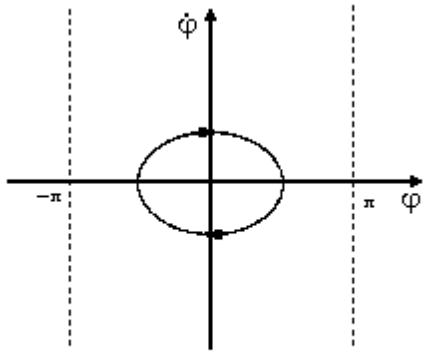


图7-4 相平面中的周期振动轨道

当由初始条件决定的运动能量足够大时，摆开始绕悬挂点O作转动．顺时针和逆时针的两种转动，在相平面中表现为从一边穿出条带，又从另一边返回的不封闭的曲线（图7-6）．图7－6中有一条特殊的**分界线**，把振动和转动两种运动制度分开．有摩擦力存在时，转动也会减小幅度，成为阻尼振动，最终停止在原点上．

无论有没有阻尼，方程（7.15）或（7.18）所描述的系统，都不会表现出混沌行为．这是因为它们是二阶微分方程，有一个数学定理说这类方程没有比周期运动更复杂的行为．

为了看到混沌运动，可以再对摆施加周期性的外力，使它成为强迫摆．这样做的办法很多．如果质点m由铁磁材料制成，可以把摆放到交变外磁场里．也可以设法周期性地改变摆的长度．小孩打秋千时不断地蹲下和立起，就是在改变摆的有效长度．这相当于使频率ω发生周期性的变化．于是方程（7.18）成为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+k\frac{d\varphi}{dt}+\omega^2(1+A\sin(\Omega T))\sin\varphi=0 \qquad (7.19)$$

这是一个参量驱动的阻尼摆，Ω是外驱动力的频率．现在它的运动不再达到静止状态（除非初始状态是静止在原点）．在参量A的某些区域里，可以出现各种不同的振动或转动，或者两

者的交替，在另外一些A值处，则可能出现看来很随机的混沌运动．图7-7是相平面中一条混沌轨道的一小段．这条轨道会永不重复地绕来绕去，最终把相平面的一大片涂成

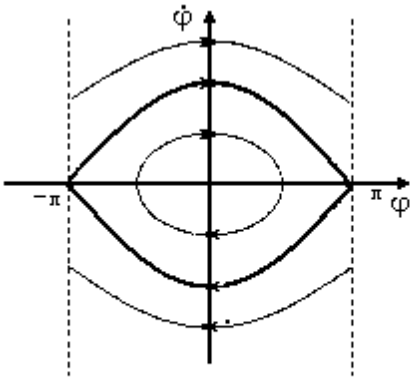


图 7-6 非线性摆的相平面，粗线是分界线，分界线上下画了两条代表转动的轨道，里面是代表振动的轨道

黑色．

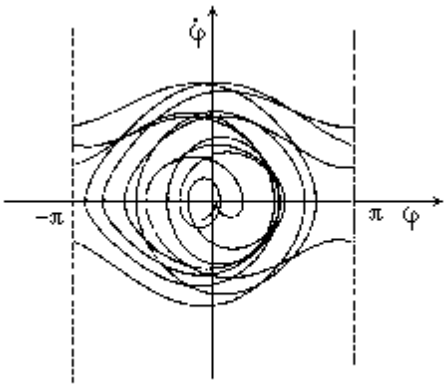


图 7-7 相平面中的一条混沌轨道

上面的讨论只是演示了参量驱动摆可以出现混沌运动．对于这样的混沌状态究竟是怎样出现的，为什么它是混沌，诸如此类的问题其实并没有回答．事实上，对于一个由微分方程描述的系统，这些问题原则上是可以回答的，但要进行大量数值和解析的研究和分析．

我们还是先考察一个十分简单的一维模型，它能够表现出许多典型的混沌行为，同时又可以作深入的分析讨论．

7．3　简单而行为丰富的一维虫口模型

马尔萨斯（T．R．Malthas）在其《论人口原理》一书中，在分析了19世纪美洲和欧洲一些地区的人口增长规律后得出结论说：“在不加控制的条件下，人口每25年增加一倍，即按几何级数增长”．不难把这种“马尔萨斯人口论”写成数学形式．为此可把25年作为一代，把第n代的人口记为y_n．马尔萨斯的意思是

$$y_{n+1}=2y_n \tag{7.20}$$

这是简单的正比例关系，还可以写得更一般些，即

$$y_{n+1}=\alpha y_n \tag{7.12}$$

其中α是比例系数．不难验证，**差分方程**（7.21）的解为

$$y_n=\alpha^n y_0 \tag{7.22}$$

y_0是开始计算的那一代人口数．只要α＞1，y_n很快就趋向无穷大，发生“人口爆炸”．这样的线性模型，完全不能反映人口的变化规律，但是稍加修正，就可以成为描述某些没有世代交叠的昆虫数目的虫口方程．

这项修正就是计入限制虫口增长的负因素．虫口数目太多时，由于争夺有限的食物和生存空间发生咬斗，由于接触传染而导致疾病蔓延，都是使虫口数目减少的事件．这些事件的数目比例于y_n^2［见式（7.9）］，于是方程（7.21）可以修正为

$$y_{n+1}=\alpha y_n-\beta y_n^2 \tag{7.23}$$

这个看起来很简单的方程，却可以展现出丰富多采的动力学行为．其实它并不只是一个描述虫口变化的模型．它同时考虑了鼓励和抑制两种因素，反映出“过犹不及”的效应，因而具有更普遍的意义和用途．

可以适当地重新“标度”方程（7.23）的变量，例如取αy_n为新的变量，而以β/α作为新的参量，还可进一步取最大虫口数目为1，这样得到一个抽象的、标准的虫口方程

$$x_{n+1}=\mu x_n（1-x_n） \tag{7.24}$$

现在x_n的变化范围是［0，1］线段，而参量μ通常在0到4之间取值．

虫口方程（7.24）是通向混沌动力学主峰的崎岖道路的起点．我们只能踏最初几步，略探其中奥秘．

先换几个角度来考察方程（7.24）．它右面的x_n从［0，1］线段取值，变换成左面的x_{n+1}，仍然在同一个线段中．这是线段到自身的一个“映射”，其一般形式为

$$x_{n+1}=f（\mu，x_n），x_n\in I \tag{7.25}$$

其中f（μ，x）是依赖于参量μ的一个非线性函数．

方程（7.4）或（7.25）又是一个**迭代过程**．取初始值x_0，计算出x_1；再把x_1代入右端，求得x_2，…，这样得到一条**轨道**

$$x_0，x_1，x_2，x_3，\cdots \tag{7.26}$$

这个迭代过程可以用图上作业形象地表示出来，如图7－8所示．图中画出了非线性函数f

（x）和代表y=x的45°倾斜的分角线．在横轴上取初值x_0，垂直向上找到与f（x）的交点就是x_1；为了把它作为下一次迭代的自变量，只须水平地找到与分角线的交点．这样，整个迭代过程就是不断地在函数f（x）和分角线之间作直线．掌握这种图上作业，对于理解虫口方程的动力学很有帮助．

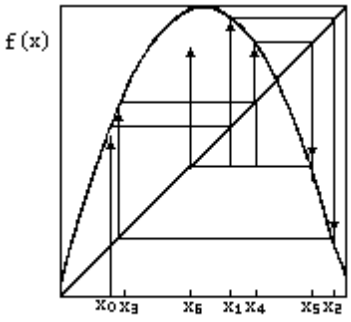


图 7-8 非线性函数f(x)的迭代过程

我们还可以把迭代计数n看作离散的时间，在马尔萨斯的模型中指第n个25年，而在虫口方程中则是第n个夏天．这样，（7.24）或（7．25）就是离散的时间演化方程，而式（7.26）是演化过程的记录．

对于轨道式（7.26）可以提许多问题．例如，它是周期还是非周期的，它是简单还是复杂的，它对于初值x_0的细微变化是否敏感，等等．这些问题都可用严格的理论方法来回答，不过我们最好先拿一个小计算器来取得一些感性知识．

先取定参数μ=2.5，用初值x_0＝0.5开始迭代，得到如下一串数值：

x_1=0.625

x_2＝0.5859375

…

x_{28}=0.599999998

x_{29}=0.6

x_{30}＝0.6

…

从x_{29}开始，都得到0.6，不再变化．这条轨道在经过一段过渡过程之后导致一个**不动点**x^*＝0.6．用虫口模型的语言说，在这样一个参量下虫口最终达到不随时间变化的固定值．重要的事实是：换用任何其它初值，结果都达到同一个不动点x^*，只是过渡过程可能略有不同．换句话说，最终的状态对初值的变化不敏感；所有的初值都被“吸引”到不动点．或者说，不动点是一个吸引子．

如果把参量改为μ=3.3，还从初值x_0＝0.5出发，经过一段过渡后轨道成为两个数的交替：

…

x_{32}＝0.479427020

x_{33}＝0.823603283

x_{34}＝0.479427020

x_{35}=0.823603283

…

我们说，这是一条**周期2**轨道．这条轨道对初值也不敏感，所有的初值最终都殊途同归，达到这个周期2吸引子．对于虫口模型，这表明如果今年夏天虫子数目多，明年夏天就少，如此交替下去．这是较为符合实际情形的结果．

用这种方法当然只能检查有限个参量点上的动力学行为．为了纵观全局，我们把计算器换成配有显示屏幕的个人计算机，并且编写如下的BASIC语言的程序[①]：

```
10  SCREEN 2：WINDOW SCREEN（0，0）-（639，199）：CLS
20  MSTART＝2.9：MEND＝4：N＝200
30  MD=（MEND—MSTART）/N
40  FOR M＝MSTART TO MEND STEP MD：X＝0.6
50  FORI=1TO 200：X＝M* X*（X-1）：  NEXTI
60  FORI=1TO 300：X＝M*X*（X-1）
70  PSET（INT（580*（M-2.9）），200-INT（200*X））
80  NEXT I，M：END
```

程序中的10和70语句与屏幕和绘图有关，在不同的计算机上可能要稍作改动．50语句是为了扔掉200个过渡点．初值都是取x_0=0.6．

我们用屏幕的纵轴表示x_n，横轴代表参量μ．从小到大取几百个参量点，在每个参量处用同样的初值x_0=0.6作迭代．舍去200个过渡点，把稍后的300个迭代值都画到屏幕上．对于不动点，300个数都落到同一点上，而对于周期2，则得到上下两个点，这样得到的**分岔图**示于图7-9中．事实上我们舍去了兴味不大的大部分不动点参量区，只画出了μ=2.9到4的一段参量轴．

分岔图是全面反映一维映射动力学行为的简便方式．在图中我们看到不动点分岔为周期2，周期2分岔到周期4等等，最终进入了沿x_n方向连成一片的混沌区．在混沌区里还可以看到

不少**周期窗口**，其中最明显的是一个周期3窗口，即三个点交替出现的周期轨道.

对分岔图可以提出许多问题：能否确定周期窗口的位置，它们的数目和出现顺序如何，它们与附近的混沌运动是什么关系，等等. 我们只能部分地讨论这些问题.

7．4　通向混沌的道路

继续考察图7-9. 图中最明显的一种改变参量值而走向混沌的道路，是不动点→周期2→周期4→周期8……，最终达到混沌区. 这叫作**倍周期分岔道路**. 把第n次分岔的参量值记为μ_n，当n较大时，这些参量靠得越来越近，很快趋近一个极限μ_∞=3.5699. 趋近极限的方式很简单，

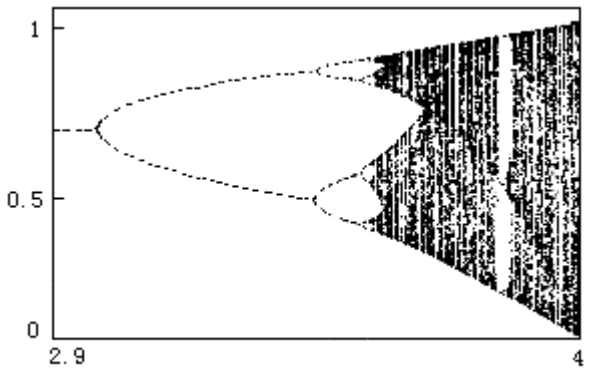


图 7-9 虫口模型的分岔图

乃是

$$\mu_n = \mu_\infty - \frac{A}{\delta^n} \qquad (7.27)$$

这里常数A与具体的映射有关，但是常数δ是普适的，即与具体模型无关. 它的值是

δ=4.6692016091…　　（7.28）

普适性是极为重要的，因为不论在一维映射还是更复杂的微分方程中，只要看到倍周期分岔现象，它们都遵从同样的规律式（7.27），其中δ具有同一个数值式（7.28）. 普适的性质必须有普适的理论说明. 正是普适性的研究加深了人们对混沌现象的认识.

把参量值取在略为超过倍周期分岔序列的极限μ_∞处，例如取μ=3.59，迭代300次的x_n变化示于图7-10中. 这显然不是一条周期轨道. 它很象是x_n的随机起伏，但似乎又有一些内部结构. 我们以后再讨论怎样刻划这类混沌轨道.

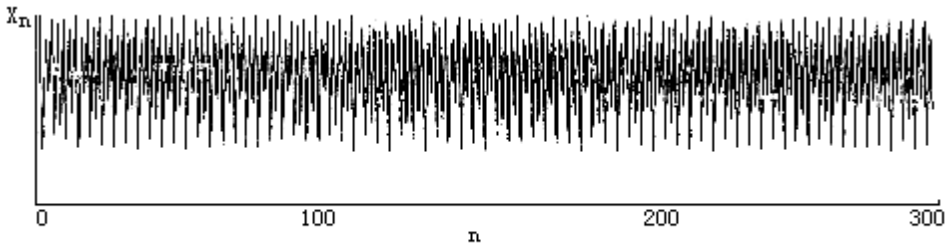


图 7-10 倍周期分岔序列极限 μ_∞ 之后的一条混沌轨道

在图7－9中周期3窗口的左端，减少参量值也会进入混沌制度．我们首先考察一下实际的迭代过程．周期3窗口的起始点可以精确地定出来，我们不详加讨论，只给出其值

$$\mu_c = 1 + \sqrt{8} = 3.828427 \qquad (7.29)$$

取稍为小于μ_C的参量，例如μ=3.82835，进行迭代．300个x_n随n的变化曲线示于图7－11中．这也是一条混沌轨道，但同图7-10的性质颇不相同．轨道的某些段落象是规则的周期运动，称为“层流相”；各层流相之间是或长或短的随机跳跃，称为“湍流相”．迭代过程中何时出现层流相，何时进入湍流相，又是随机和不可预言的．但是，只要参量一定，湍流相或层流相的平均时间也是确定的．参量值越是靠近μ_C，湍流相的平均时间越短．当μ趋近μ_C时，湍流相平均时间趋近零的方式是

$$\text{湍流相平均时间} \propto \frac{1}{\sqrt{|\mu - \mu_c|}} \qquad (7.30)$$

这一规律与温度T从低温侧趋向居里温度T_C时，铁磁体平均磁化强度消失的方式类似：

$$\text{平均磁化强度} \propto |T - T_C|^{\beta} \qquad (7.31)$$

根据相变的平均场理论，指数β=1/2，更与（7.30）式一致．如图7－11所示，在周期窗口起点附近进入混沌运动的情形，称为阵发混沌道路．

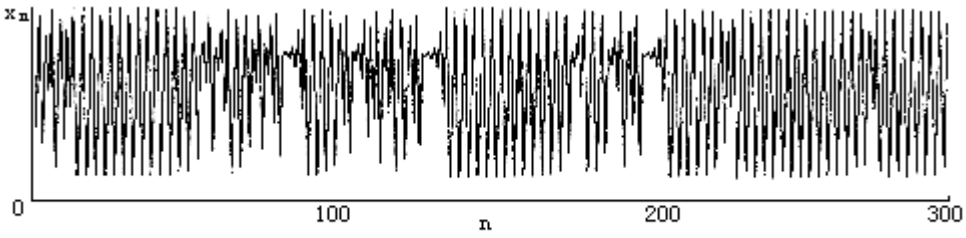


图 7-11 一条阵发混沌轨道

顺便指出，前面“层流”、“湍流”这些说法只是从湍流理论中借来的形象比喻，与真正的湍流现象并没有直接关系．这里讨论的只是很少的运动自由度的时间行为．实际的湍流涉及无穷多自由度的时间和空间的耦合，仍然是自然科学中没有彻底解决的难题．

倍周期分岔和阵发混沌是两种最常见的通向混沌的道路．它们不仅见于许多一维映射和高维的微分方程组，还在一大批实验中被证实．虫口模型中还存在着其它通向混沌的道路，

例如，从准周期运动往混沌的过渡．高维的数学模型中还有更为丰富的混沌发展模式，此处不再详述．

7．5　混沌的定义和刻划

混沌现象的理论描述有坚实的数学基础和定义，有可以从实验数据出发的种种刻划方式．我们在这里作简要介绍．

先谈混沌的数学定义．

“混饨”作为有严格数学定义的概念进入现代科学语汇是在1975年．那年数学家李天岩和约克（J．A．Yorke）发表了一篇题为《周期3意味着混沌》的论文．他们研究一维映射的性质，证明只要在映射中存在着周期3轨道，由不同初值出发的两条轨道就会有时靠得极近（其距离的“下确界”为零），有时又必定分离得足够远．李天岩和约克把这种运动状态称为混沌．

其实，在李和约克之前类似的概念早就被少数科学家理解，只是没有起专门名字而已．早在19世纪末法国数学家阿达玛尔（J．Hadamard）和庞加莱（H．Poincaré）就知道，某些确定论的数学模型会表现出与随机过程无法区分的运动形态．1961年日本电机工程师上田皖亮（Y．Ueda）在一个模拟电路中发现并且描述了后来称为混沌的振荡．1963年美国气象学家罗伦兹（E．N．Lorenz）在一个大气热对流的简化模型中发现了对初值变化十分敏感的非周期运动．1972年荷兰数学家茹厄尔和塔肯斯（D．Ruelle，F．Takens）在讨论湍流发生机制时，引进了“奇怪吸引子”的概念，他们当时并不知道上田皖亮和罗伦兹已经观察到奇怪吸引子的实例．所谓奇怪吸引子是不同于我们前面见过的不动点和周期解那些平庸吸引子的相空间中的几何对象，非线性系统的长时间行为完全局限在它们上面．奇怪吸引子上的运动轨道对初值的细微变化极其敏感．初值失之毫厘，运动轨道虽然因为限制在吸引子上而不一定能差之千里，但却变得面目全非，以致不能根据当前的运动状态来精确地预言未来或追溯过去．对初值细微变化的敏感依赖性，可以严格地用数学表述，成为混沌的另一种定义．

事实上，李天岩和约克的定理只不过是乌克兰数学家沙尔可夫斯基（A．N．Sharkovskii）在1964年发表的一个美妙的数学定理的特例．沙尔可夫斯基把所有自然数重新排了一个序

$$3\prec5\prec7\cdots\prec3\times2\prec5\times2\prec7\times2\prec\cdots\prec3\times2^2\prec5\times2^2\prec\cdots2^3\prec2^2\prec2\prec1 \qquad (7.32)$$

这里的数学记号≺读作“领先于”：5领先于7，等等．任何整数P和q都在沙尔可夫斯基序列中有确定的位置．沙尔可夫斯基证明，如果在一个一维映射中存在着周期p轨道，则一切满足p≺q的q周期轨道也都存在．换句话说，一切在序列（7.32）中排在P后面的周期都存在．3领先于一切整数，自然地导致李天岩和约克的定理．

应当特别指出，沙尔可夫斯基序列和李天岩与约克的定理所提到的周期轨道，绝大部分都是不稳定的．如果不采取特殊办法，在实验观测和计算机模拟中就看不到它们．例如，图7-9所示分岔图中的周期窗口，对应的都是稳定轨道．沙尔可夫斯基定理的一个推论是：混沌运动中包含着无穷多种不稳定的周期轨道．这对于理解混沌运动的图像十分重要．

混沌的其它定义，往往要引用某些刻划混沌的特征量．我们在这里讨论一个重要的特征量——李雅普诺夫（A．M．Lyapunov）指数，它描述不同初值的轨道互相分离开的平均速度．

考虑式（7.25）所代表的一维映射．取两个靠得很近的初值x_0和$x_0+\triangle_0$来进行迭代．迭代一次后的差别是

$$\triangle_1=f（x_0+\triangle_0）-f（x_0）\cong f'（x_0）\triangle_0 \tag{7.33}$$

由于参量相同，上式中没有写μ．因为$\triangle_0$很小，$f（x_0+\triangle_0）$只展开到泰勒级数的一次项，f'是$f（x）$的一次导数．迭代n次后的距离差为

$$\triangle_n=f^n（x_0+\triangle_0）-f^n（x_0）\cong\left.\frac{df^n}{dx}\right|_{x=x_0}\triangle_0 \tag{7.34}$$

这里$f^n（x）$表示函数$f（x）$自己嵌套n次．例如

$$f^3（x）=f（f（f（x））） \tag{7.35}$$

而根据复合函数的链微分法则，我们有

$$\frac{df^n(x_0)}{dx}=\prod_{i=0}^{n-1}f'(x_i) \tag{7.36}$$

这里x_i就是构成轨道（7.26）的那些点．

一般说来，对初值敏感的轨道会按指数函数迅速分离开，可以写成

$$\Delta_n=\Delta_0e^{\lambda n} \tag{7.37}$$

这里指数λ刻划相邻轨道的分离速度．如果λ＜0，$\Delta_n\to0$，两条轨道并不分离．只有λ＞0，才表示初值的细微变化要迅速放大．当$n\to\infty$时，式（7.37）定义的λ就是李雅普诺夫指数．根据式（7.34）和（7.36），这就是

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|f'(x_i)| \tag{7.38}$$

这个定义很便于数值计算．对虫口模型（7.24），取同分岔图7－9一致的参数变化范围，即μ=2.9～4，计算结果示于图7-12中．

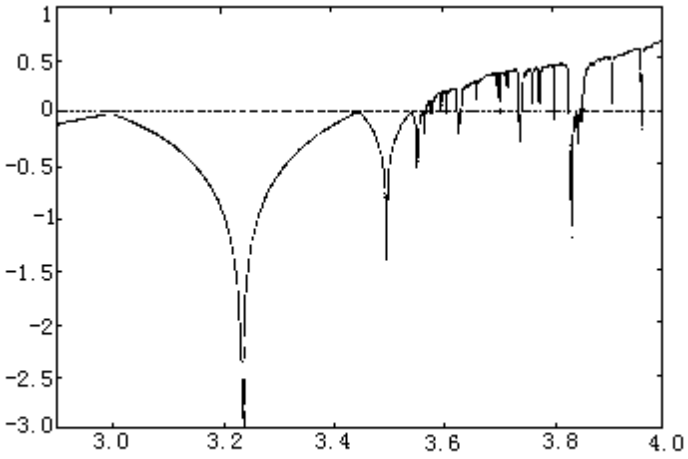


图7-12　虫口模型的李雅普诺夫指数随参量的变化

同图7－9对比，可见周期窗口对应负李雅普诺夫指数，而混沌区对应正指数．其实我们在计算中只取了n＝2000．如果把n取得更大，而且把参数区间分得更细，图中还会看到更多的周期窗口处有更深的下降，同时混沌区的李雅普诺夫曲线的包络线随参量上升．

对于有多个自由度的系统，李雅普诺夫指数也有多个，原则上可以从数学模型或实验数据出发进行估算．至少有一个李雅普诺夫指数为正，乃是更为实用的混沌定义．

混沌的数学定义还有多种．例如，正的“拓扑熵”定义**拓扑混沌**，有限长的“转动区间”定义**转动混沌**．它们都有严格的数学理论和实际的计算方法．不过要把某个数学模型或实验现象明白无误地纳入某种混沌定义并非易事．多数从事实际工作的科技人员可以使用下面的**混沌的工作定义**．

如果所处理的动力学过程是确定论的，没有任何外加的随机因素，而单个轨道又表现出象是随机的对初值细微变化极为敏感的行为，同时一些整体性的经长时间平均或对大量轨道平均所得到的特征量（如正的李雅普诺夫指数）又对初值变化并不敏感，加之上述状态又是经过动力学行为的一系列突变而达到的，那么所研究的现象极可能是混沌．

7．6　混沌的应用

对混沌现象的研究，起了开拓眼界的作用．它使人们看到了普遍存在于自然界中而多年来被视而不见的一种运动形态．在较为低级的层次上，混沌往往是应当设法回避的行为；在物质运动的高级形式，例如生命现象中，混沌可能是具有根本意义的积极因素．在这两者之间．是各种各样的应用可能性．我们举一些实例．

人们曾经期望，利用低温下通过两个超导体之间极薄的绝缘层发生的超导隧道效应，可以制造低噪声的微波参量放大器．然而1977年以后发现，放在微波谐振腔中的超导隧道结，随着增益提高还给出反常高噪声．实验在4K低温下进行，噪声的等效温度却高达50000K以上．这是用当时已知的任何机制都无法解释的．后来明白了，原来系统进入了混沌制度，“噪声”来自动力学本身．

声学中有更多混沌无益的实例．令强功率超声波通过液体，波前的局部压力可能减小到

使液体气化发泡．早在30年代就知道这种“空化”过程伴随着大量噪声，频谱中甚至还有原来频率一半的分频成分．近年来在空化噪声中观察到了通过倍周期分岔走向混沌的全过程．空化现象还发生在高速运动的涡轮叶片背面，是造成叶片损伤的一种因素．在更简单的声学系统，例如扩音器中，线性响应通常导致高保真度，而质量不佳的喇叭在较低的输入电平上就可能发生向分频的分岔——而这正是混沌乐章的序曲．

高能粒子加速器中束流的损失，受控热核反应实验装置中约束磁场的漏失，核反应堆中循环水的有害回流，乃至光学双稳器件的不稳定性——凡此种种概与混沌有关．深水采油浮塔及其附近系泊的用以悬挂输油管路的相联的塔柱，在海浪冲击下会发生次频甚至混沌振动．这些通常都属于应当回避的混沌现象．

1990年以来发展了**控制混沌**的概念并为实验证明可行．基本思想很简单．奇怪吸引子里包含着无穷多种或长或短的不稳定周期；一条混沌轨道象是不断地在这些不稳定周期之间随机跳跃．事实上，不太长的周期可以从实验数据中提取和判定．对系统施加适当的与时间有关的微扰，可能把某种特定的周期运动稳定下来，从而把混沌运动变成所希望的周期运动．控制混沌是一个刚开始发展的领域，还要作不少研究才能阐明其潜力．

地球物理学中有许多复杂的动力学过程，很难简单地以“利”“害”名之，人们必须深入研究才能认识它们．例如，古地磁资料表明地磁场在近数百万年内曾经多次随机地反向，又如影响全球天气变化的南太平

洋海温的非周期振荡，即所谓厄尔尼诺（EI Nino）现象，最近几年都有

人用确定论模型中的混沌加以解释．当然，人们还不能宣称混沌就是这些现象的唯一原因，但至少增加了一种考虑问题的观点．

理解流体湍流的发生机制，始终是研究混沌的重要动力．目前研究得较为透彻的，是局限在容器中的流体的运动．例如，夹在上下底板之间而从下面加热的流体，从热对流失稳而发展到振荡和湍流．又如介于两个同轴圆柱面之间的流体，当内圆柱转动速度渐高时，会经历一系列运动模式的突变，最终进入湍流状态．这类湍流发展过程的最初几步，与非线性系统走向混沌的道路有并行或相似之处．工业应用中更为重要的是开放流中的湍流．人们希望研究混沌现象对认识这类湍流也有所启发．为此必须把空间自由度的耦合也考虑进来，而不能象本文前面那样，只研究少数自由度的时间演化．对各种“时空混沌”模型的研究，是本领域的另一个前沿．

当我们进而考察生命现象时，混沌行为的启发作用就更大了．各种各样的生物节律，既非完全周期，又不可能属于纯粹随机，它们既有“锁频”到自然界周期（季节，昼夜等）的一面，又保持着内在的“自洽”性质．许多生物节律可用耦合的非线性振子模型，而混沌运动正是耦合振子系统的一类典型行为．20世纪20年代后期已经有人用非线性电路模拟过心脏搏动．近几年生理实验和数学模型的研究，进一步揭示了各种心律不齐、房室传导阻滞与混沌运动的可能联系．如果考察人类的脑电波，对比就更为尖锐．癫痫患者发病时的脑电波呈明显的周期性，而正常人的脑电波近乎随机讯号．进一步测量表明它们不是随机的，而象是来自维数不高的动力学过程．目前距离真正认识脑的动力学还很遥远，但神经网络和脑功能的实验与模型研究正在成为物理学的关心对象．

7．7　没有“混沌学”——浅谈混沌的哲学意义

我们在结束本专题之前，简单讨论一下混沌的哲学意义．

先从“混沌”这两个字本身说起．奥地利物理学家玻耳兹曼（L．Boltzmann）在19世纪后半叶发展气体分子动理论时，曾经作过关于分子运动随机性的假设，我国前辈物理学家王竹溪先生定名为“分子混沌性假设”．因此，中国物理学文献中早就用过混沌这个词，不过其涵义是混乱无规．

李天岩和约克1975年使用Chaos这个源于希腊的古字．其原意与中文混沌接近，系指世界未开、天地不分之前的状态．庄子在《内篇》卷七讲过一段关于名为“浑沌”的神话皇帝的故事，用了与“混”相通的“浑”字．不过汉语中早就两字混用，1915年初版的《辞源》就说“浑沌”与“混沌”同．因此，我们就选用了使用得较为普遍的混沌一词．不论其语源如何，作为科学概念的混沌，应当根据其严格定义来理解和运用．

不过，混沌一词也引发了不少望文生义、牵强附会的伪科学议论．有人甚至说什么“混沌论”是继量子力学和相对论之后的第三次突破．到处乱贴混沌标签，象是抓住了新的科学思想，其实除了混淆视听，没有解决任何问题．对这种状况，应当有所澄清．

第一，混沌并不新，作为自然现象它早就存在，作为科学对象，也已经研究了100年．第二，混沌并不神秘，它已经有坚实的数学基础和大量的理论与实验研究，特别是精致的计算机模拟．第三，混沌不是议论，搬弄名词不能代替对实际的混沌现象的科学研究．第四，混沌不是一批完备的教条，而是正在发展的研究领域．有志者应当钻研科学文献，而不能满足于科普读物．

同波动现象作类比很有教益．自然界中处处有波动现象，它们背后有统一的数学理论．然而这并不能代替对水波，声波，电磁波，地震波的具体研究．仅仅制造象“波动论”这样的名词，并不能推动科学进步．基于类似的理由，“混沌论”的提法也并无必要．

最后，我们再作几条一般性的评述．

首先是关于自然现象，例如天气的可预报性．科普文献中常常遇见一种观点，说混沌动力学的发展排除了长期预报的可能性．其根据则是气象学家罗伦兹在20世纪70年代后期一次国际会议上所作的比喻．罗伦兹说天气过程以及描述它们的非线性方程是如此不稳定，以致巴西亚马孙河流域热带雨林中一只蝴蝶偶然拍动翅膀，可能两星期以后在美国得克萨斯州引起一场龙卷风．在描述混沌运动对初值细微变化的敏感性这个意义下，罗伦兹是正确的．这对于人类的预报本领有什么含义呢？

人类并不能失去从来还没有拥有过的东西．由现在完全推知未来的确定论观点其实一直是一种幻想．我们现在对于预报问题有了更符合实际的态度．其实对短期预报和长期预报的要求从来不同．只有对于短期预报，我们才关心轨道的细节，例如下星期天的温度变化情形．对于长期预报，人们更注意各种平均量的发展趋势，例如今后20年内华北年降水量的多少．混沌动力学的进步，恰恰在这两个方面都提高了人类的预报本领．

自然界是统一的整体，但自然科学中有确定论和概率论两套描述体系．牛顿以来的科学传统，比较推崇确定论体系，而把概率论描述作为“不得已而为之”的补充．其实，完全的决定论和纯粹的概率都是抽象的极限情况．真正的自然界介于二者之间．对混沌现象的研究，帮助我们从更为接近实际的一种角度认识世界，使我们从确定论和概率论的根深蒂固的人为对立中解脱出来．人们对偶然性和必然性这些哲学范畴的认识也会随之深化．

---

① 也可能是能量驱动的线性系统，这里不讲。

① 不熟悉BASIC语言者，可以跳过这个程序和随后的说明，直接看图7-9所示的分岔图及有关课文。